نام و نام خانوادگی:

کلاس : ۲۰۱-۲۰۲

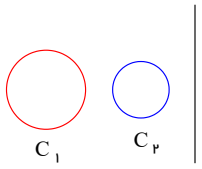
نام آزمون: مماس مشترک هندسه ۲

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۸/۲۸

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان
فرزانگان ۴

فرزانگان ۴

۱ - دو دایره متخارج C_1, C_2 و خط d خارج آنها بر خط المرکزین عمود است. چند نقطه روی خط می‌توان یافت که از آن نقاط بتوان بر هر دو دایره مماس رسم کرد؟



① ۰ ② ۲ ③ ۴ ④ بی شمار

۲ - طول خط المرکزین دو دایره به شعاع ۵ و ۸ برابر ۴ است، این دو دایره چگونه‌اند؟

① متداخل ② متقاطع ③ متخارج ④ مماس

۳ - فاصله مرکزهای دو دایره ۱۶۹ سانتی‌متر است اگر شعاع آن‌ها ۵۰ و ۷۰ سانتی‌متر باشد. طول مماس مشترک داخلی آن‌ها کدام است؟

① ۱۱۳ ② ۱۳۹ ③ ۱۱۹ ④ ۱۲۱

۴ - در دو دایره متقاطع به مراکز O, O' و شعاع های ۳ و ۴ واحد، فاصله نقطه تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{۱}{۲}OO'$ می باشد، اندازه مماس مشترک محدود به دو نقطه تماس این دو دایره چند واحد است؟

① ۴ ② $۲\sqrt{۵}$ ③ $۲\sqrt{۶}$ ④ ۵

۵ - طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی‌متر برابر $۳\sqrt{۳۳}$ سانتی‌متر است. کمترین فاصله نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۶ - دو دایره C_1 و C_2 به شعاع های $r_1 = \frac{۱}{۲}$ و $r_2 = ۳$ و طول خط‌المرکزین $d = \frac{۱}{۲}$ مفروض‌اند. چند دایره به شعاع واحد وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟

① ۲ ② ۱ ③ ۰ ④ ۳

۷ - دو دایره C_1 و C_2 به شعاع‌های $R_1 = ۲$ و $R_2 = ۶$ و طول خط المرکزین $d = ۱۰$ مفروضند شعاع دایره‌ای که مرکزش روی خط‌المرکزین و با C_1 مماس داخل و با C_2 مماس خارج باشد، کدام است؟

① ۷ ② ۹ ③ ۳ ④ ۱

۸ - دو دایره C_1 و C_2 به شعاع ۵ مماس خارجند. چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره C_1 مماس باشد و در دایره C_2 وتری به طول ۶ جدا کند؟

① صفر ② ۲ ③ ۴ ④ بی‌شمار

۹ - فاصله خط المرکزین دو دایره به شعاع‌های $۳x + ۴$ ، $۲x - ۳$، ۱۶ می باشد، اگر دو دایره متقاطع باشند، x کدام می تواند باشد؟

① ۱۲ ② ۹ ③ ۳٫۵ ④ ۳

۱۰ - طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایره ی بزرگتر است. شعاع دایره بزرگتر چند برابر شعاع دایره کوچکتر است؟

① $\sqrt{۲}$ ② ۱٫۵ ③ $\sqrt{۳}$ ④ ۲

۱۱ - دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در دو نقطه‌ی A و B متقاطع‌اند. اگر شعاع‌های OA و $O'A$ بر هم عمود باشند، طول مماس مشترک خارجی دو دایره برحسب شعاع‌های R و R' کدام است؟

① $۲\sqrt{RR'}$ ② $\sqrt{۲(R^۲ + R'^۲)}$ ③ $\sqrt{۲RR'}$ ④ $۲\sqrt{R^۲ + R'^۲}$

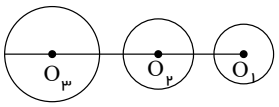
۱۲ - فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره ۵ سانتی‌متر است. اگر طول مماس مشترک داخلی این دو دایره برابر ۳ سانتی‌متر باشد، کمترین فاصلهٔ بین نقاط واقع بر این دو دایره چند سانتی‌متر است؟

① ۱ ② ۱٫۲۵ ③ ۰٫۵ ④ ۰٫۷۵

۱۳ - دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $4\sqrt{6}$ در دایره ی بزرگ تر می‌توان رسم کرد که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس باشند؟

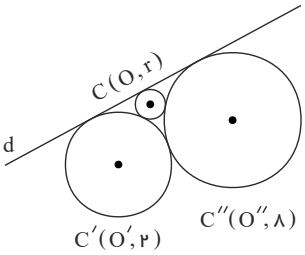
① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۴ - در شکل مراکز سه دایره بر یک خط راست قرار دارند اگر $r_1 = 2$ و $r_2 = 3$ و $O_1O_2 = 6$ و $O_2O_3 = 10$ و خطی وجود داشته باشد که بر هر سه دایره مماس باشد، r_3 چقدر است؟



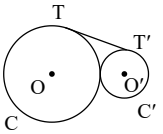
① $\frac{28}{3}$ ② $\frac{14}{3}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{7}{6}$

۱۵ - در شکل زیر، سه دایره دو به دو مماس برون‌اند و خط d بر هر سه دایره مماس است. اندازهٔ r کدام است؟



① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$

۱۶ - دو دایرهٔ به شعاع‌های $R = 10$ و $R' = 4$ مماس خارج‌اند. اگر از وسط پاره‌خط TT' (مماس مشترک دو دایره) عمودی خارج کنیم تا OO' را در نقطهٔ A قطع کند، طول پاره‌خط AT کدام است؟



① $2\sqrt{10}$ ② ۷ ③ $\sqrt{89}$ ④ ۱۰

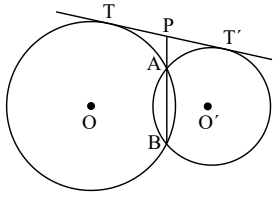
۱۷ - دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ مماس درون هستند. طول بزرگترین وتر از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، کدام است؟

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{3}$

۱۸ - دو دایره با شعاع‌های ۲ و ۳ در نقطهٔ M مماس خارج‌اند. اگر TT' مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، حاصل $MT^2 + MT'^2$ کدام است؟

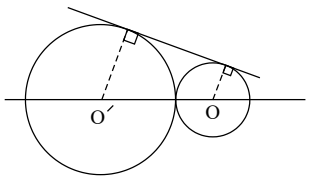
① ۶ ② ۱۳ ③ ۱۸ ④ ۲۴

۱۹ - مطابق شکل، دو دایره به مراکز O و O' به طول خط‌المرکزین ۱۶ مفروض‌اند و می‌دانیم امتداد وتر مشترک AB ، مماس مشترک TT' را در نقطهٔ P قطع می‌کند. اگر مساحت چهارضلعی $AOBO'$ برابر ۷۲ و طول TT'برابر ۱۲ باشد، طول PA کدام است؟



① ۲ ② ۴ ③ ۳ ④ ۵

۲۰ - دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس برهم‌اند. دایره به قطر OO' با مماس مشترک خارجی در نقطهٔ تماس M مشترک‌اند. فاصلهٔ M از نقطهٔ تماس دو دایره، کدام است؟



① ۶ ② ۶٫۵ ③ ۷ ④ ۷٫۵

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ این دو دایره ۴ مماس مشترک دارند که در ۴ نقطه خط d را قطع می‌کنند لذا از این ۴ نقطه می‌توان خطوطی رسم کرد که هر خط بر دو دایره مماس باشد.

۲ - گزینه ۲ چون $۵+۸>۴>۸-۵$ بنابراین $|R-R'|<d<R+R'$ پس دو دایره متقاطع اند.

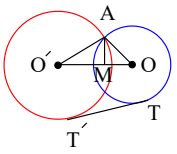
۳ - گزینه ۳

$$L=\sqrt{d^۲-(R_۱+R_۲)^۲}$$

$$L=\sqrt{۱۶۹^۲-۱۲۰^۲}=\sqrt{(۱۶۹-۱۲۰)(۱۶۹+۱۲۰)}=\sqrt{۴۹\times۲۸۹}=۷\times۱۷=۱۱۹$$

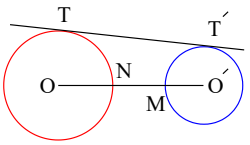
۴ - گزینه ۳ بنابر فرض $AM=\frac{۱}{۲}OO'$ پس مثلث OAO' قائم الزاویه است، پس وتر OO' در این مثلث قائم الزاویه برابر ۵ $=\sqrt{۳^۲+۴^۲}$ می باشد. اندازه ی مماس مشترک خارجی در این دو دایره برابر است با:

$$TT'=\sqrt{OO'^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{۲۵-۱}=۲\sqrt{۶}$$



۵ - گزینه ۳ با توجه به شکل MN کمترین فاصله بین نقاط این دو دایره است و $MN=d-(R+R')$

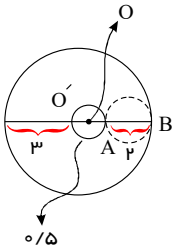
$$TT'=۳\sqrt{۳۳}=\sqrt{OO'^۲-(R-R')^۲}\Rightarrow ۳\sqrt{۳۳}=\sqrt{OO'^۲-۶۴}\Rightarrow OO'=۱۹$$



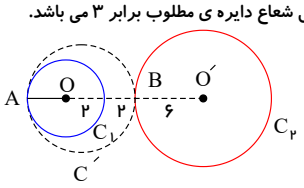
پس:

$$MN=۱۹-(۱۱+۳)=۵$$

۶ - گزینه ۲ O' مرکز دایره بزرگ‌تر و O مرکز دایره‌ی کوچک‌تر با توجه به شکل فقط یک دایره می‌توان رسم کرد که بر هر دو دایره مماس باشد و شعاع آن یک است نقاط تماس A و B هستند.



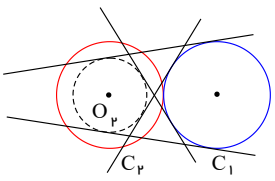
۷ - گزینه ۳ از آنجا که $d>R_۱+R_۲$ پس دو دایره ی $C_۲, C_۱$ متخارج هستند دایره ی مورد نظر دایره ی خط چین و به قطر $AB=۶$ است پس شعاع دایره ی مطلوب برابر ۳ می باشد.



۸ - گزینه ۳ در دایره ی $C_۲$ بیشمار وتر به طول ۶ می توان رسم کرد.

این وترها بر دایره به مرکز $O_۲$ و شعاع ۴ $=\sqrt{۵^۲-(\frac{۶}{۲})^۲}$ مماس هستند.

این دایره با دایره ی $C_۱$ متخارج بوده و دارای چهار مماس مشترک هستند. این چهار مماس مشترک جواب های مطلوب هستند.



۹ - گزینه ۳ برای دو دایره متقاطع داریم:

$$|R_۲ - R_۱| < d < R_۱ + R_۲$$

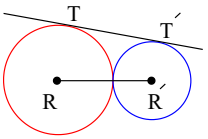
پس:

$$x + ۷ < ۱۶ < ۵x + ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱۶ < ۵x + ۱ \\ x + ۷ < ۱۶ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۳ < x \\ x < ۹ \end{cases} \rightarrow ۳ < x < ۹$$

۱۰ - گزینه ۴ دو دایره مماس خارجی هستند پس $OO' = R + R'$ داریم:

$$TT' = \sqrt{۲}R \Rightarrow TT' = \sqrt{(R+R')^۲ - (R-R')^۲} = ۲\sqrt{RR'}$$

$$۲\sqrt{RR'} = \sqrt{۲}R \Rightarrow ۲R' = R$$



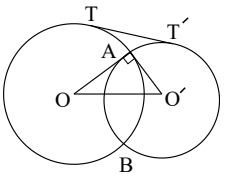
۱۱ - گزینه ۳ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAO':

$$OA = R, O'A = R', \widehat{A} = ۹۰^\circ, OO' = d$$

$$OO'^۲ = OA^۲ + O'A^۲ \Rightarrow d^۲ = R^۲ + R'^۲$$

طول مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^۲ - (R-R')^۲}$

$$TT' = \sqrt{R^۲ + R'^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{۲RR'}$$

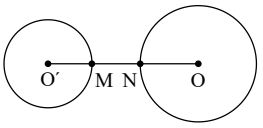


۱۲ - گزینه ۱

طول مماس مشترک داخلی $L = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲} \rightarrow ۳ = \sqrt{۵^۲ - (R+R')^۲} \rightarrow R + R' = ۴$

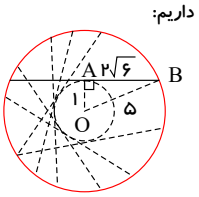
دو دایره متخارج هستند $\rightarrow d > R + R'$

$$MN = OO' - ON - O'M = d - (R + R') = ۵ - ۴ = ۱$$

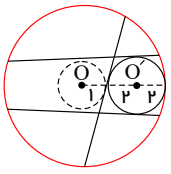


۱۳ - گزینه ۳ وترهای به طول $۴\sqrt{۶}$ که در درون دایره ای به شعاع ۵ رسم می شوند، همگی بر دایره ای به شعاع ۱ و هم مرکز با دایره ی فوق مماس اند، زیرا در مثلث قائم الزاویه ی OAB داریم:

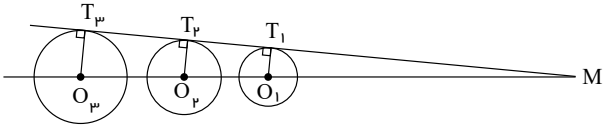
$$OA^۲ = OB^۲ - AB^۲ \Rightarrow OA^۲ = ۲۵ - ۲۴ = ۱ \Rightarrow OA = ۱$$



حال این دایره ی به شعاع ۱ بر دایره به شعاع ۲ مماس خارج خواهد شد. چون این دو دایره مماس خارج هستند، سه مماس مشترک دارند که جواب های مسأله می باشند.



۱۴ - گزینه ۲ فرض کنید خطی که بر هر سه دایره مماس است خط المرکزین آنها را در M قطع کند داریم:

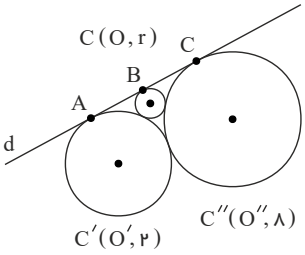


$$O_۱T_۱ || O_۲T_۲ \Rightarrow \frac{MO_۱}{MO_۱ + ۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow MO_۱ = ۱۲$$

$$O_۱T_۱ || O_۳T_۳ \Rightarrow \frac{MO_۱}{MO_۳} = \frac{۲}{r_۳} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۲ + ۶ + ۱۰} = \frac{۲}{r_۳} \Rightarrow r_۳ = \frac{۱۴}{۳}$$

۱۵ - گزینه ۲

می‌دانیم اگر دو دایره به شعاع‌های R و R' مماس خارج باشند، طول مماس مشترک خارجی آنها برابر است: $۲\sqrt{RR'}$



داریم:

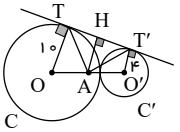
C, C' مماس خارجی $\Rightarrow AB = ۲\sqrt{۲ \times r} = ۲\sqrt{۲r}$

C, C'' مماس خارجی $\Rightarrow BC = ۲\sqrt{۸r} = ۴\sqrt{۲r}$

C'', C' مماس خارجی $\Rightarrow AC = ۲\sqrt{۲ \times ۸} = ۸$

$$AC = AB + BC \Rightarrow ۸ = ۲\sqrt{۲r} + ۴\sqrt{۲r} \Rightarrow ۶\sqrt{۲r} = ۸ \Rightarrow \sqrt{۲r} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲r = \frac{۱۶}{۹} \Rightarrow r = \frac{۸}{۹}$$

۱۶ - گزینه ۳

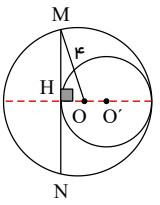


$$O'T' \| OT,\ TT' \text{ وسط } H \Rightarrow OO' \text{ وسط } A, AH = \frac{۴ + ۱۰}{۲} = ۷$$

$$TT' = ۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۴۰} = ۴\sqrt{۱۰} \Rightarrow TH = \frac{۴\sqrt{۱۰}}{۲} = ۲\sqrt{۱۰}$$

$$AT^{۲} = AH^{۲} + TH^{۲} = ۴ \times ۱۰ + ۴۹ \Rightarrow AT = \sqrt{۸۹}$$

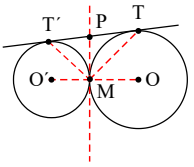
۱۷ - گزینه ۴ هر چه وتر در دایره بزرگ‌تر به مرکز نزدیک‌تر باشد، بزرگ‌تر است پس MN بزرگ‌ترین وتر مماس بر دایرهٔ کوچک‌تر است. داریم:



$$OH = ۴ - ۲ = ۲ \ ,\ \ OM = ۴$$

$$MH^{۲} = ۴^{۲} - ۲^{۲} \Rightarrow ۲\sqrt{۳} = MH \Rightarrow MN = ۲MH = ۴\sqrt{۳}$$

۱۸ - گزینه ۴ می‌دانیم که مماس‌های رسم شده از P بر دایره برابرند. داریم:



$$PT = PM \ ,\ \ PT' = PM \Rightarrow PM = \frac{TT'}{۲}$$

$$\Rightarrow T\hat{M}T' = ۹۰^{\circ} \Rightarrow MT^{۲} + MT'^{۲} = TT'^{۲}$$

طول مماس مشترک خارجی: $TT' = ۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۲ \times ۳} \Rightarrow TT'^{۲} = ۴ \times ۶ = ۲۴$

۱۹ - گزینه ۳ $S_{AOBO'} = \frac{AB \times OO'}{۲} (AB \perp OO' \text{ زیرا})$

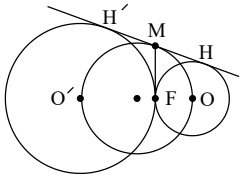
$$\Rightarrow \frac{AB \times ۱۶}{۲} = ۷۲ \Rightarrow AB = ۹$$

طبق روابط طولی : $PT^{۲} = AP \times PB$ و $PT'^{۲} = AP \times PB \Rightarrow PT^{۲} = PT'^{۲} = AP \times PB$

$$\Rightarrow ۶^{۲} = AP \times PB \Rightarrow PT = PT'^{۲} = \frac{TT'}{۲} = ۶$$

$$\Rightarrow ۳۶ = AP(AP + ۹) \Rightarrow AP^{۲} + ۹AP - ۳۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (AP - ۳)(AP + ۱۲) = ۰ \Rightarrow AP = ۳$$



گزینه ۱ - ۲۰

$HH' = ۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۴ \times ۹} = ۱۲$

$\left.\begin{matrix} MH = MF \\ MH' = MF \end{matrix}\right\} \rightarrow MF = MH' = MH = \frac{HH'}{۲} \rightarrow MF = \frac{۱۲}{۲} = ۶$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۴ - ۳	۷ - ۳	۱۰ - ۴	۱۳ - ۳	۱۶ - ۳	۱۹ - ۳
۲ - ۲	۵ - ۳	۸ - ۳	۱۱ - ۳	۱۴ - ۲	۱۷ - ۴	۲۰ - ۱
۳ - ۳	۶ - ۲	۹ - ۳	۱۲ - ۱	۱۵ - ۲	۱۸ - ۴	